MIME – LXP10

« La naissance du calcul différentiel à la fin du XVII^{e} et le développement des sciences physico-mathématiques au XVIII^{e} siècle »

Alexandre GUILBAUD

E-mail : guilbaud@math.jussieu.fr
Page web : http://www.math.jussieu.fr/~guilbaud

Plan du cours (1/2)

Introduction : lieux de science et circulation des savoirs

- Les lieux de science : les académies
- Les correspondances
- Les journaux et périodiques

I. Naissance d'un nouveau calcul

- Le calcul fluxionnel de Newton et le calcul différentiel et intégral de Leibniz
- La polémique entre Newtoniens et Leibniziens

II. Diffusion du calcul différentiel et intégral

- Premier pas et diffusion du calcul différentiel sur le continent Européen dans la décennie 1690 (Leibniz, Jean et Jacques Bernoulli, Guillaume de l'Hospital)
- La contribution de Pierre Varignon

III. La question des fondements du calcul

- Le débat à l'Académie royale des sciences de Paris (1700-1701)
- L'*Analyste* de Berkeley et le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin (1742)
- L'article « Calcul différentiel » de D'Alembert dans l'*Encyclopédie*

Plan du cours (2/2)

IV. Les sciences physico-mathématiques

- L'organisation des savoirs mathématiques au milieu du XVIII^{e} siècle
- Le problème de la figure de la Terre
- La naissance et le développement de l'hydrodynamique au XVIII^{e} siècle

Introduction (1/3) – Les lieux de science : les académies

- La Royal Society de Londres

  - La Royal Society de Londres existe depuis 1661.

  - Elle ne reçoit aucun financement de la couronne et vit des cotisations de ses membres (qui devinrent fort nombreux).

  - Indépendante de l'Etat, elle jouit du privilège de pouvoir utiliser le service postale diplomatique pour ses échanges avec l'étranger et a pour seul obligation de diriger l'Observatoire royal de Greenwich.

- L'Académie royale des sciences de Paris

  - L'Académie est créée par Colbert en 1666. L'Observatoire de Paris naît en 1667 sous l'impulsion de l'Académie.

  - Au XVII^{e} siècle, l'Académie est placée sous l'autorité de trois ministres : Colbert de 1666 à 1683, Louvois de 1683 à 1691 et Pontchartrain à partir de 1691.

  - Le 20 janvier 1699, Louis XIV lui attribue son premier règlement. Elle reçoit le titre d'Académie royale et est installée au Louvre. Elle fonctionnera avec ce règlement jusqu'en 1793, date de sa suppression par la Convention.

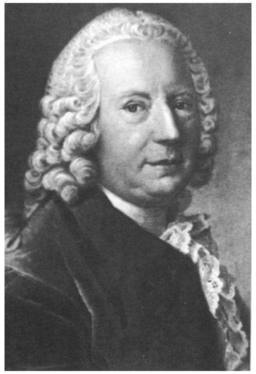
Introduction (1/3) – Les lieux de science : les académies

Jean-Baptiste Colbert présentant les membres de l'Académie royale des sciences à Louis XIV (H. Testelin, d'après une gravure de Lebrun)

Introduction (1/3) – Les lieux de science : les académies

- Au XVIII^{e} siècle, les Académies se multiplient en Europe :

  - l'Académie de Berlin, créée en 1700 sous l'impulsion de Leibniz, reconnue en 1711 et réorganisée par Frédéric II en 1744

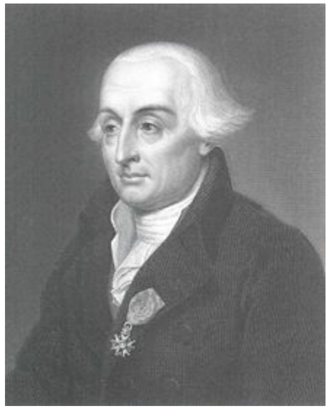


  - l'Académie de Petersbourg, créée en 1724, accueille de nombreux savants étrangers : Daniel Bernoulli, Euler.

  - l'Académie de Turin, où Lagrange fait ses débuts avant d'obtenir une place à l'Académie de Berlin en 1766 (suite au départ d'Euler pour Petersbourg).

  - les Académies de Bologne, de Lisbonne, de Göttingen, d'Edinburgh, etc.

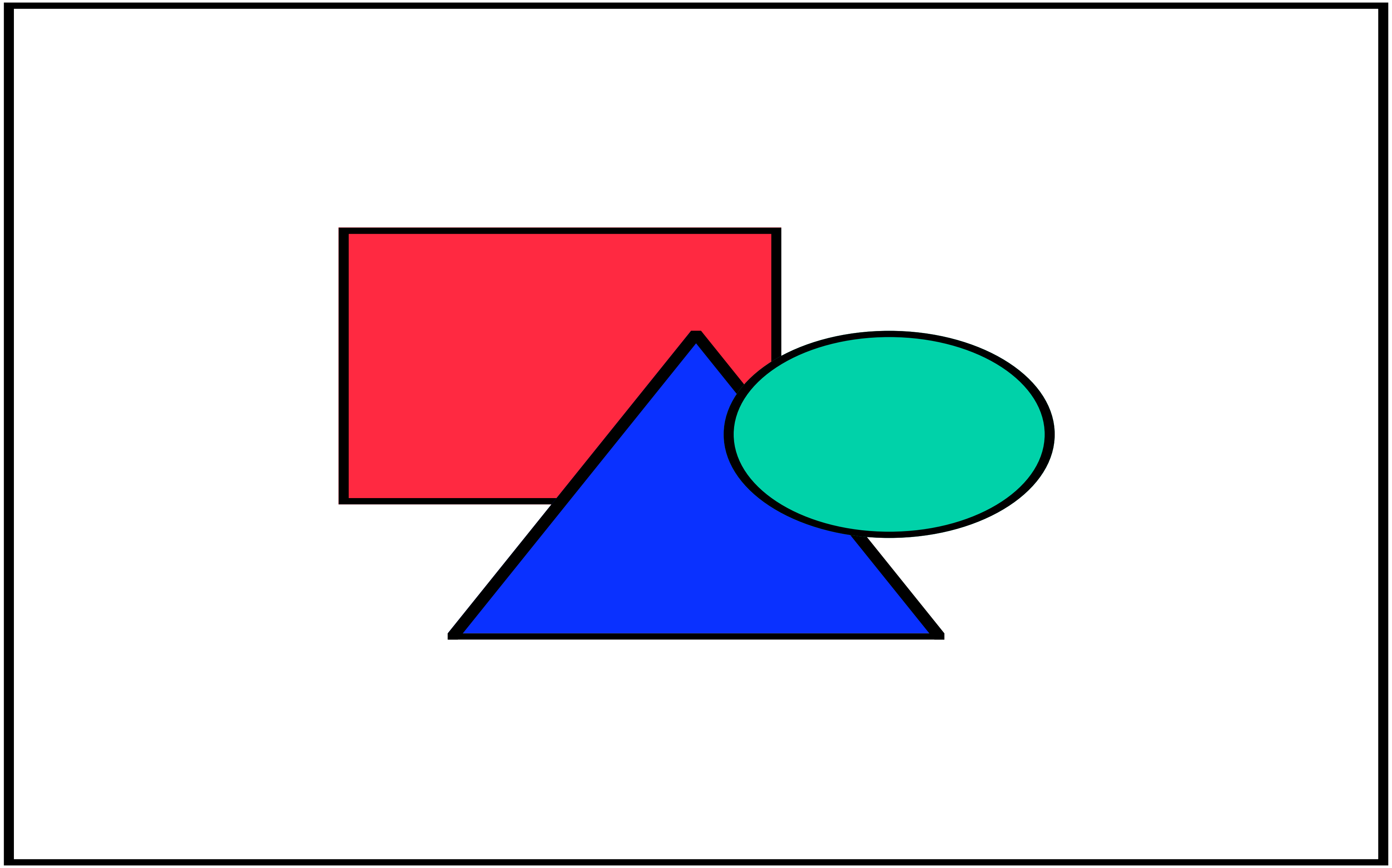
- En France, on assiste de même à la naissance de nombreuses académies en Province (Montpellier, Lyon, Toulouse, etc.), de l'Académie de Marine de Brest, etc.



- Les échanges sont nombreux en Europe entre ces différentes académies, par le biais notamment des correspondances de leurs membres.

Le réseau de correspondance de D'Alembert (1717-1783)

Introduction (2/3) – Les correspondances

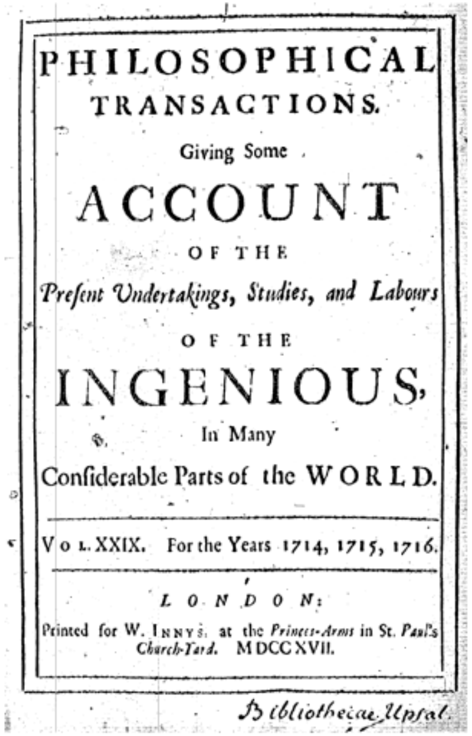


Le réseau de correspondance de D'Alembert (1707-1783)

Introduction (3/3) – Les journaux et périodiques

- L’impressionnante masse de travaux scientifiques des académiciens (en particulier) se traduit par une multiplication des journaux, gazettes, revues et publications périodiques.

- Les périodiques académiques :



PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS. Giving Some ACCOUNT OF THE Present Undertakings, Studies, and Labours OF THE INGENIOUS, In Many Considerable Parts of the WORLD.

Vol. XXIX. For the Years 1714, 1715, 1716.

LONDON: Printed for W. Innys, at the Princes-Arms in St. Paul's Church-Yard. MDCCXVII.

Bibliothecae Upsal.

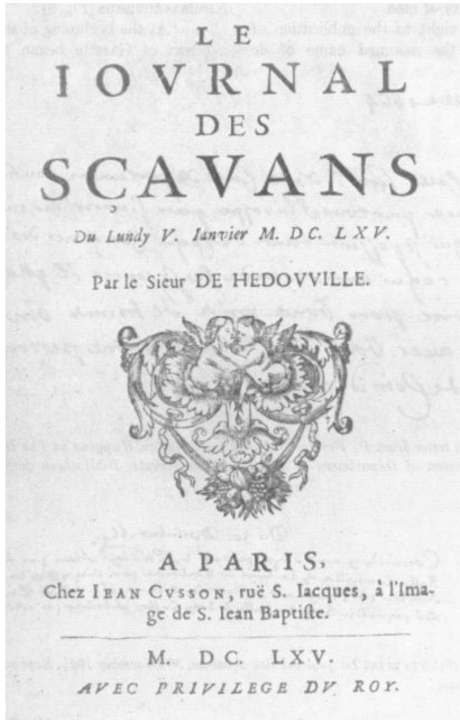
Fondées en 1665, les *Philosophical Transactions* correspondent à la première revue strictement scientifique.

HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

A PARIS, DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Les volumes de l’*Histoire de l’Académie royale des science* de Paris.

- Les journaux :



LE IOVRNAL DES SCAVANS

Du Lundy V. Ianvier M. DC. LXV.

Par le Sieur DE HEDOVVILLE.

A PARIS, Chez IEAN CVSSON, ruë S. Iacques, à l'Image de S. Iean Baptiste.

M. DC. LXV.

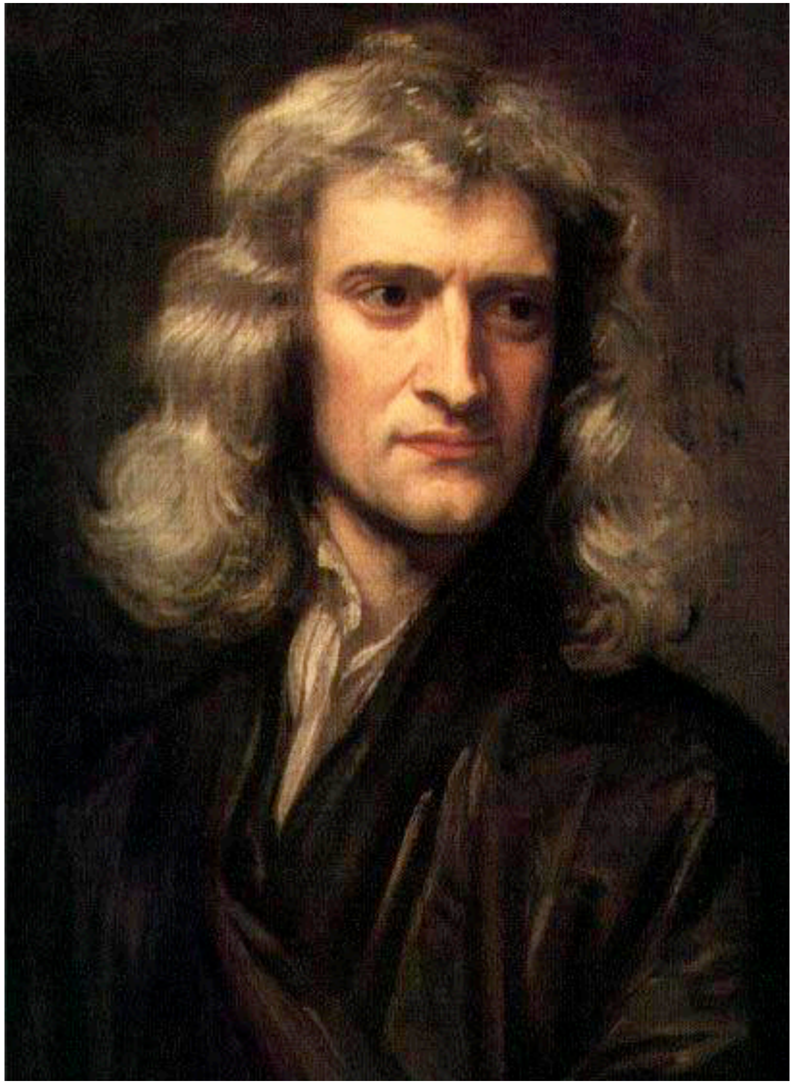
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Le *Journal des savants* naît en 1665. Il traite de mathématiques, de philosophie naturelle, d’histoire, etc.

I. La naissance d'un nouveau calcul (1/2)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Isaac Newton (1643-1727)



I. La naissance d'un nouveau calcul (1/2)

- Le calcul fluxionnel newtonien :

  - 1664-1666 : Newton s'initie au mathématiques de son temps et produit ses premières recherches originales.

  - 1669 : il communique son « De analysi per aequationes numero terminorum infinitas » à quelques mathématiciens anglais mais ne le publie pas.

  - 1687 : publication de ses *Principia mathematica naturalis philosophae*

  Le calcul fluxionnel newtonien est fondé sur une **approche cinématique.**

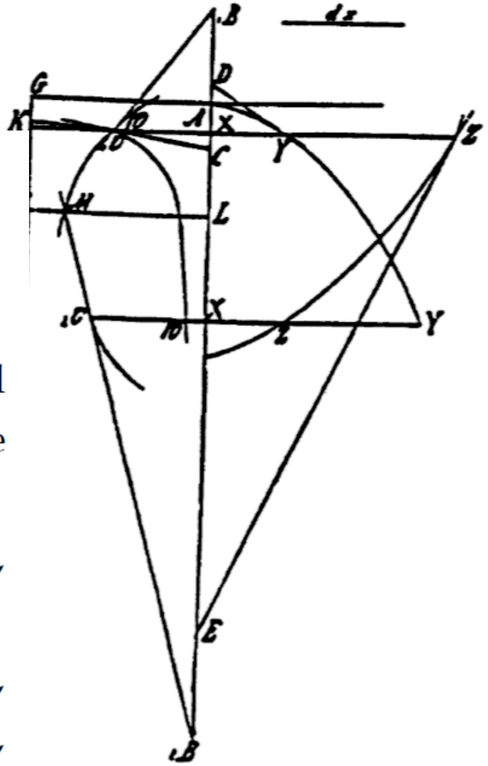
- Le calcul différentiel et intégral de Leibniz :

  - « Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », *Acta Eruditorum*, octobre 1684.

  - « De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *Acta Eruditorum*, juin 1686.

  - « Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium… » , *Acta Eruditorum*, septembre 1693.

  Le calcul différentiel et intégral est fondé sur une **approche géométrique**.



"Appelons alors *dx* un segment de droite choisi arbitrairement et *dv* (*dw*, *dy* ou *dz*), c'est-à-dire la différence de *v* ("differentia") (de *w*, de *y* ou de *z*) un segment qui soit avec *dx* comme *v* (*w*, *y* ou *z*) avec *XB* (*XC*, *XD* ou *XE*)".

"Soit a une constante donnée, *da* sera égal à *0* et $\overline{dax}$ sera égal à *adx*. Si *y* est égal à *v* (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe *YY* égale à l'ordonnée correspondante de la courbe *VV*), *dy* sera égal à *dv*.

Maintenant l'*Addition et la Soustraction* : si *z - y + w + x* est égal à *v*, $\overline{dz - y + w + x}$ ou *dv* sera égal à *dz - dy + dw + dx*.

Multiplication : $\overline{dxv}$ est égal à *xdv + vdx*, c'est-à-dire, en posant *y* égal à *xv*, on aura *dy* égal à *xdv + vdx*. Car on a tout loisir d'employer, soit l'expression *xv*, soit à sa place pour abréger, une lettre, par exemple *y*. Remarquons que dans ce calcul, *x* et *dx* sont traités de la même façon, de même que *y* et *dy*, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle, n'est pas toujours possible, si ce n'est avec une certaine précaution dont nous parlerons ailleurs.

Ensuite, la *Division* : $d\frac{v}{y}$ ou (en posant *z* égal à $\frac{v}{y}$) *dz* est égal à $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$

I. La polémique sur l'invention du nouveau calcul

✓ La querelle est initiée par Nicolas Fatio de Duillier, proche de Newton :

> « Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. Si Leibniz, le second inventeur, lui a emprunté quelque chose, je préfère ne pas juger et laisser cela à d'autres, à ceux qui ont vu les lettres de Newton et ses autres manuscrits. Ni le silence du plus modeste Newton, ni l'empressement de Leibniz à s'attribuer partout l'invention du calcul n'en imposeront aux personnes qui examinent ces papiers, comme je l'ai fait moi-même ».

✓ Excessivement longue et violente, elle implique de nombreux proches de Leibniz et de Newton. Elle gagne le terrain des mathématiques en 1713.

✓ Dans un compte-rendu anonyme rédigé pour les Philosophical Transactions et publié en 1715 dans le Journal littéraire de la Haye, Newton exige :

> « Il faut […] qu'il [Leinitz] renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont pas de droit ».

✓ Elle finit par prendre des accents nationalistes, s'élargit aux newtoniens s'opposant au leibniziens puis aux Britanniques contre les Continentaux…

II. Les premiers pas du calcul différentiel

- Dans une lettre du 15 décembre 1687, Jacques Bernoulli demande des précisions à Leibniz sur son nouveau calcul.

- Leibniz, en voyage en Allemagne, en Autriche et en Italie, met trois ans à répondre... Jacques Bernoulli, de même que son frère Jean, s'initient seuls entre 1687 et 1690.

Jacques Bernoulli (1654-1705)

Jean I Bernoulli (1667-1748)

- En contact étroit, Leibniz, Jacques et Jean Bernoulli appliquent le nouveau calcul à différents problèmes lancés sous forme de défis (d'abord aux cartésiens par Leibniz, puis à la communauté savante en général par l'un des trois géomètres).

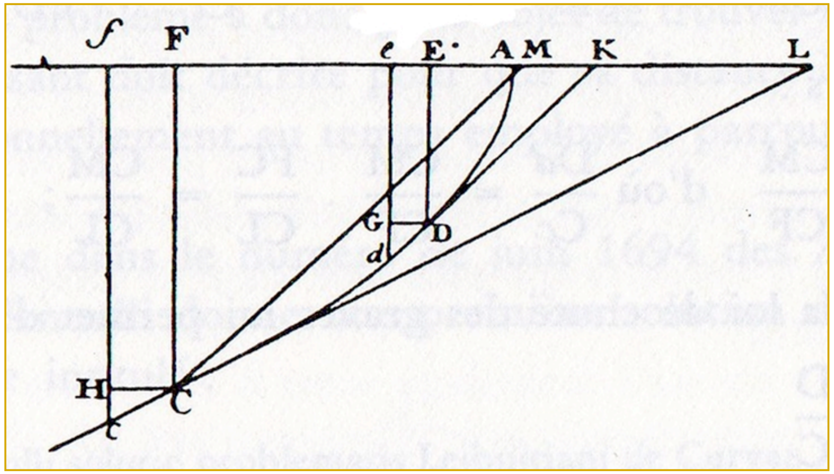
- Les trois savants sont rejoints par le Marquis Guillaume de l'Hospital après son initiation au nouveau calcul par Jean Bernoulli à l'occasion du voyage de ce dernier à Paris à l'hiver 1691-1692.

II. Détermination de trajectoires décrites par des corps en mouvement (1/2)

Le problème de la courbe isochrone

- En septembre 1687, Leibniz lance un défi aux cartésiens :

« Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descend uniformément, et approche également l'horizon en temps égaux. L'Analyse de Messieurs les cartésiens le donnera peut-être aisément. » (*Nouvelles de la République des Lettres*, 1687, p. 956)



- Octobre 1687 : publication d'une première solution par Christiaan Huygens ne faisant pas usage du calcul différentiel et intégral.

- Avril 1689 : Leibniz publie sa solution mais n'y a pas explicitement recours à son nouveau calcul.

- Mai 1690 : solution de Jacques Bernoulli ($1^{\text{ère}}$ apparition du terme « intégration »)

- 1690 [?] : solution de Jean Bernoulli

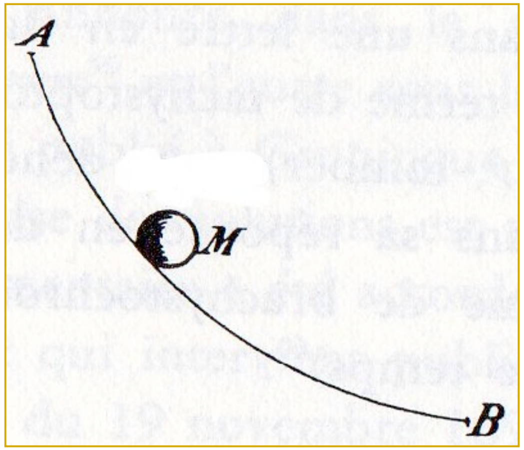
Solutions en deux parties :
- $1^{\text{ère}}$ partie : le problème physique est ramené à un problème de géométrie
- 2^{e} partie : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.

II. Détermination de trajectoires décrites par des corps en mouvement (2/2)

Le problème de la courbe brachystochrone

- En juin 1696, Jean Bernoulli lance un nouveau défi :

« Datis in plano verticali duobos punctis A et B, assignaremobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B. »
(*Acta Eruditorum*, juin 1696, p. 269)



- Dans sa lettre du 16 juin 1696, Leibniz fait parvenir une solution à Jean Bernoulli.

- Publication des solutions de Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli et Guillaume de l'Hospital dans le numéro de mai 1697 des *Acta Eruditorum*.

- Toujours des solutions en deux parties :

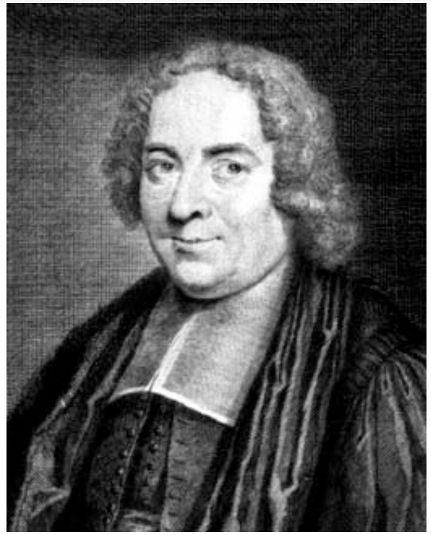
  - 1ère partie : le problème physique est ramené à un problème de géométrie
  - 2e partie : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.

La courbe cherchée est un arc de cycloïde…

II. L'introduction du calcul à l'Académie royale des sciences de Paris

✓ Initié par Jean Bernoulli à l'hiver 1691-1692, Guillaume de l'Hospital entre à l'Académie des sciences de Paris en juin 1693. En mai et août 1693, puis en juin 1694, il soumet trois mémoires utilisant – sans les détailler – les méthodes du calcul leibnizien.

✓ En juin, juillet, septembre et novembre 1695, Pierre de Varignon fait la lecture de quatre mémoires utilisant le nouveau calcul.



Pierre Varignon (1654-1722)

✓ En juin 1696, Guillaume de l'Hospital publie le premier traité de calcul différentiel : l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

✓ Suite à cette parution, Sauveur présente le même mois le nouveau calcul devant l'Académie.

Guillaume de l'Hospital (1661-1704)

II. Pierre Varignon et l'algorithmisation de la science du mouvement (1/2)

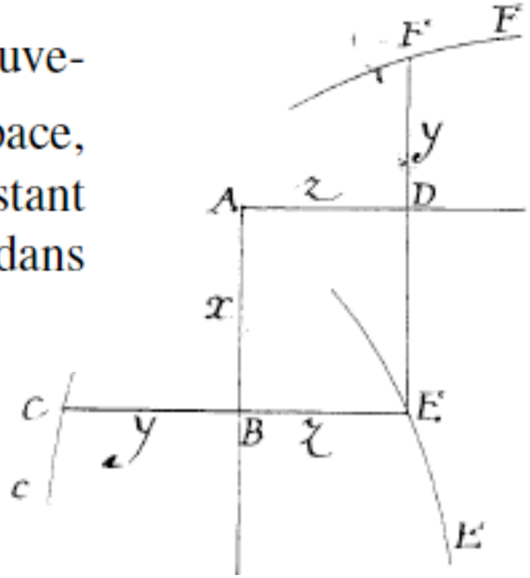
✓ Dans deux mémoires présentés les 5 juillet et 6 septembre 1698, Pierre Varignon élabore le concept de « vitesse dans chaque instant » :

« Pour le voir (tous les angles rectilignes de la figure qu'on voit icy, etant droits) soient $AB = x$ les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employez à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point B de ces espaces.

[...]

De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, a cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \dfrac{dx}{dz}$ pour la regle de tous les mouvemens variés comme on voudra, c'est a dire quelque rapport d'espace, de temps, ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant etant toujours et par tout egale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même differentielle de temps. »

(*Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris*, t. 17, f. 298 v° - 299 r. [« 1er mémoire »])



II. Pierre Varignon et l'algorithmisation de la science du mouvement (2/2)

✓ Le 30 janvier 1700, Varignon présente un nouveau mémoire intitulé :

« Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, et les temps, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvements rectilignes variés à discretion ».

✓ Il y traite de la question des forces centrales introduites par Newton dans ses *Principia* (1687) et de l'accroissement de vitesse (i.e. de l'accélération) qu'elles produisent :

« De plus les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force et des quarrés des temps employés à les parcourir ; l'on aura aussi $ddx = ydt^2$, ou $y = \dfrac{ddx}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une Règle $y = \dfrac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \dfrac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose icy de résoudre. »

(*Histoire et mémoires de l'Académie royale des sciences. Partie mémoires*, année 1700 (1703), p. 23.)

III. Les « mathématiciens du vieux stile »

✓ En février 1697, Philippe de La Hire (1640-1718) présente un court mémoire intitulé « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits » :

- sans précautions, la « méthode des infinis » peut conduire à des erreurs
- la « géométrie ordinaire » (ou « géométrie des anciens ») demeure un garde fou nécessaire.

✓ D'autres savants partagent les doutes de Philippe de La Hire, en particulier l'abbé Bignon, le père Gouye, l'abbé Gallois et Michel Rolle.

✓ Le 6 août 1697, Varignon écrit à Jean Bernoulli :

> *« M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay desja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour la décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre ».*

III. Le débat à l'Académie des sciences de Paris, 1700-1701 (1/4)

✓ Le 17 juillet 1700, le débat débute avec la lecture d'un mémoire de Michel Rolle critiquant le manque de rigueur des concepts et principes fondamentaux du calcul différentiel et intégral leibnizien.

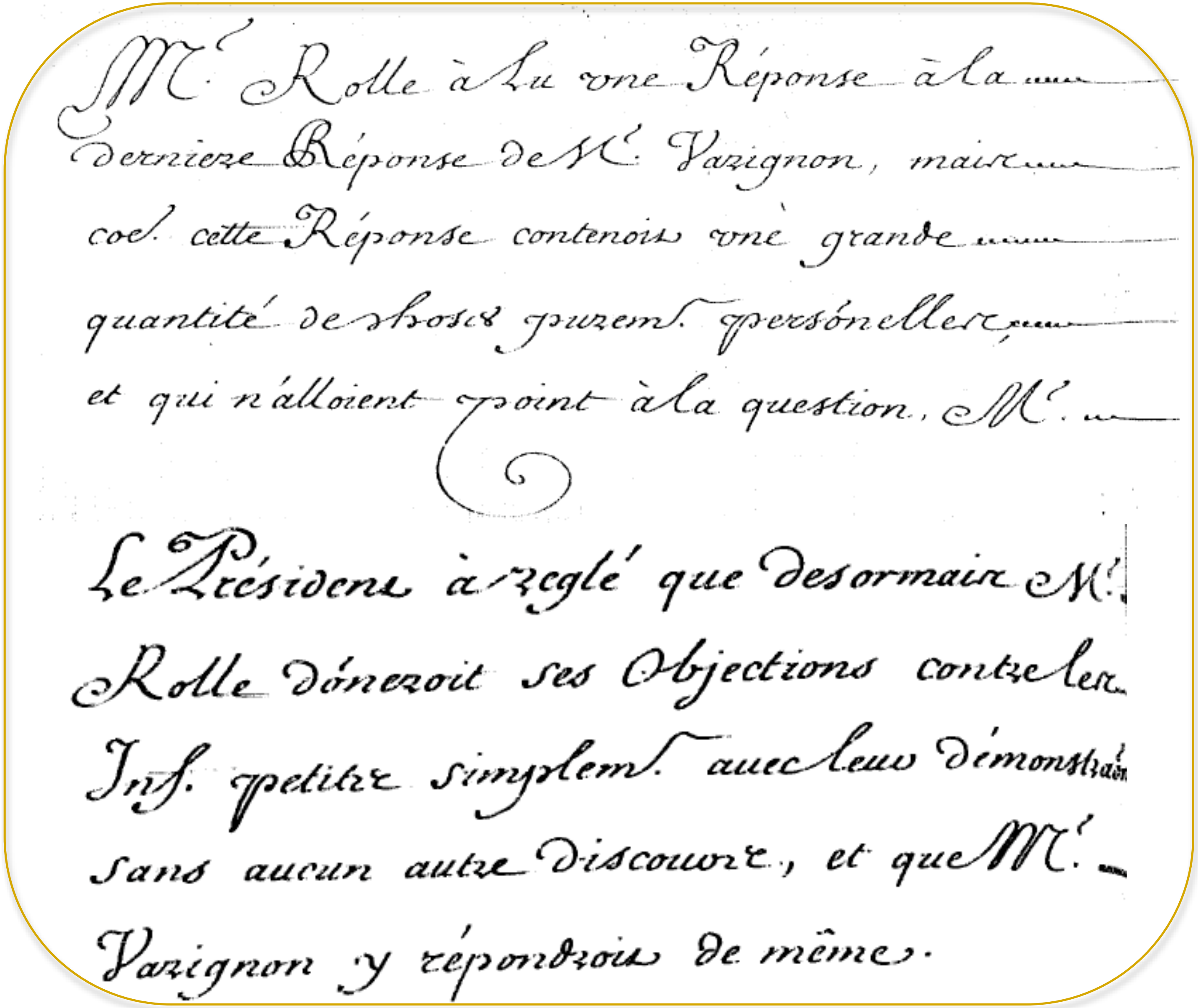
✓ En l'absence du Guillaume de l'Hospital, Pierre Varignon prend la défense du nouveau calcul et répond à Rolle dans un mémoire présenté les 7 et 11 août 1700.

✓ Dans quatre autres mémoires, Michel Rolle tente de montrer, à partir de l'étude de plusieurs exemples de courbes, que le nouveau calcul conduit à l'erreur…

✓ Chronologie du débat :

- 27 novembre et 1^er^ décembre 1700 : 2^e^ mémoire de Michel Rolle
- 12 et 16 mars 1701 : 3^e^ mémoire de Michel Rolle
- 9 juillet, 6 août et [?] 1701 : réponses de Pierre Varignon
- 21 mai et 2 juillet 1701 : 4^e^ et 5^e^ mémoires de Michel Rolle
- [?] : dernières réponse de Pierre Varignon.

Registres manuscrits des procès-verbaux de l’Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 183 r° - v° (séance du 21 mai 1700)

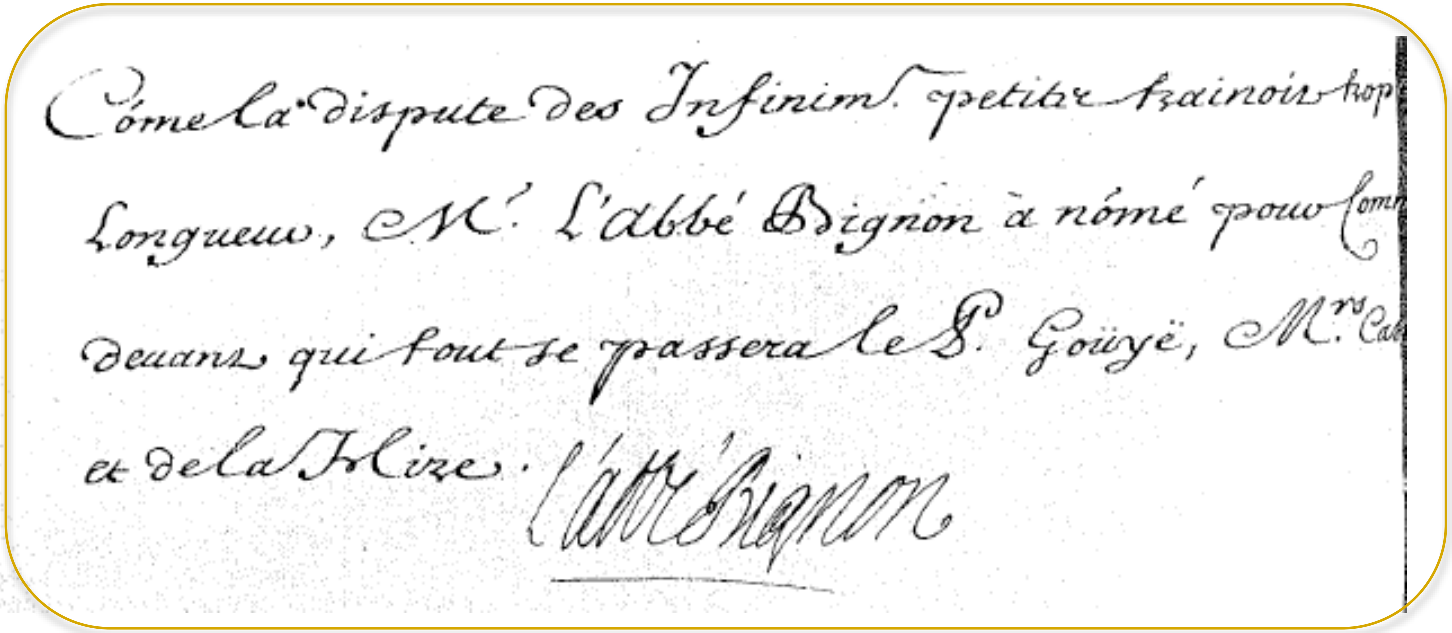


Mr Rolle a lu une Réponse à la
derniere Réponse de Mr Varignon, mais
coe. cette Réponse contenoit une grande
quantité de choses purem. personelles
et qui n'alloient point à la question, Mr

Le Président a reglé que desormais Mr
Rolle dôneroit ses Objections contre les
Inf. petits simplem. avec leur démonstration
sans aucun autre discours, et que Mr
Varignon y répondroit de même.

III. Le débat à l'Académie des sciences de Paris, 1700-1701 (2/4)

Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 335 v° (séance du 3 septembre 1700)


Côme la dispute des Infinim. petits trainoit trop
Longueur, Mr. L'abbé Bignon a nómé pour Comm
deuans qui tout se passera le P. Goüyë, Mrs Ca
et de la Hire. L'abbé Bignon

✓ Chronologie du débat (suite) :

- 13 avril 1702 : Michel Rolle relance le débat dans le *Journal des Sçavans* (dirigé par l'abbé Gouye).

- Joseph Saurin reprend le rôle de Pierre Varignon et répond à Rolle dans le *Journal des Sçavans* du 13 avril 1702.

- Leurs échanges durent jusqu'en 1705-1706

III. Le débat à l'Académie des sciences de Paris, 1700-1701 (4/4)

✓ Les trois difficultés soulevées par Michel Rolle contre le nouveau calcul dans son premier mémoire du 17 juillet1700 (d'après la réponse de Varignon) :

- « **Difficulté I.** Si en geometrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres ».

« L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connoitre ceux des grandeurs finies qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. »
(Guillaume de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits*, préface, p. 1-2)

- « **Difficulté II.** Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut estre prise pour egale a cette même grandeur ».

- « **Difficulté III.** Si les différentielles sont des zéros absolus ».

III. L'*Analyste* de George Berkeley (1734)

✓ Dans l'*Analyste* (1734), George Berkeley reprend l'essentiel des critiques de Michel Rolle concernant le manque de rigueur, mais vise à la fois le calcul fluxionnel de Newton et le calcul leibnizien :

Georges Berkeley (1685-1753)

> *« Je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quel objet vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quel en est la validité ? Et comment les mettez-vous en œuvre ?*
>
> […]
>
> *En vérité, on doit reconnaître que les mathématiciens modernes ne considèrent pas ces points [les fluxions et les infinitésimaux] comme des mystères, mais comme conçus clairement et maîtrisés par leurs esprits étendus. Ils n'hésitent pas à dire qu'à l'aide de cette nouvelle analyse, ils peuvent pénétrer jusque dans l'infini lui-même, qu'ils peuvent même étendre leurs vues au-delà de l'infini.*
>
> […]
>
> *J'admets qu'on puisse créer des signes pour dénoter quelque chose ou rien ; et que, par conséquent, dans l'expression primitive x + o, o a pu représenter, soit un incrément, soit rien. Mais alors, quoi que vous lui fassiez représenter, vous devez raisonner en conformités avec notre convention et ne jamais recourir à une ambiguïté. »*

III. Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin, 1742 (1/3)

- ✓ Dès la parution de l'*Analyste*, de nombreux mathématiciens choqués répondent aux attaques de Berkeley. Parmi eux, James Jurin, John Walton et Benjamin Robins.

- ✓ Maclaurin décide également de répondre en rédigeant un ouvrage identifiant et démontrant rigoureusement les fondements du calcul des fluxions :

> « C'est pourquoi, dès que cette pièce [l'*Analyste*] fut tombée entre mes mains, (et avant que j'eus connaissance des Ouvrages que d'autres avoient entrepris pour la réfuter), je formai le dessein de démontrer ce élémens à la manière des Anciens, et de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les démonstrations les plus rigoureuses. »
> (*Traité des fluxions*, trad. par le Père Pézenas,1749, préface, p. ix.)

- ✓ Il se met à la rédaction de l'ouvrage à la fin de l'année 1734 (ou au début de l'année 1735).

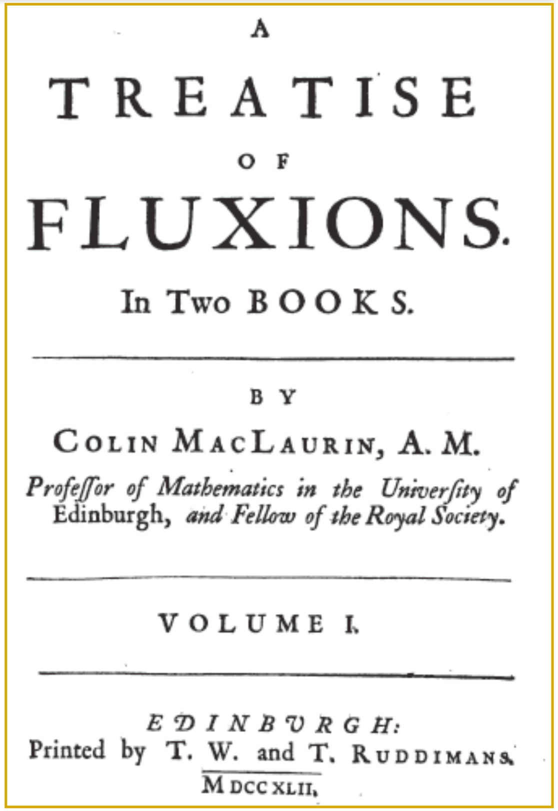
- ✓ En 1737, de nombreux chapitres sont déjà rédigés mais certains de ses amis, dont Stirling, lui conseillent de développer l'ensemble, en particulier la question des applications des fluxions aux « mathématiques pures » et « mathématiques mixtes ».

- ✓ Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin paraît finalement en 1742.

III. Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin, 1742 (2/3)

La structure de l'ouvrage (1/2)

Chap. I : fondements de la méthode des fluxions
Chap. II et III : application aux figures planes
Chap. IV : application aux figures planes
Chap. V : fluxion des puissances entières positives
Chap. VI :fluxion des logarithmes
Chap. VII : relation entre tangente et fluxion
Chap. VIII : fluxions des surfaces
Chap. IX : règles sur les maximas et les minimas (méthode des fluentes)
Chap. X : asymptotes aux courbes
Chap. XI : sur la courbure
Chap. XII : équivalence entre méthodes fluxionnelle et leibnizienne
Chap. XIII : problème de la courbe brachystochrone
Chap. XIV : figures des planètes (en particulier de la Terre) et explication des marées.


A
TREATISE
OF
FLUXIONS.
In Two BOOKS.

BY
COLIN MACLAURIN, A. M.
Professor of Mathematics in the University of Edinburgh, and Fellow of the Royal Society.

VOLUME I.

EDINBURGH:
Printed by T. W. and T. RUDDIMANS.
MDCCXLII.

Premier Livre :

« Sur les Fluxions des Grandeurs Géométriques »

La structure de l'ouvrage (1/2)

Chap. I : « Des Fluxions des quantités considérées abstraitement, ou comme étant représentée par les caractères généraux de l'Algèbre »

Chap. II : méthode des fluentes et définition des séries infinies (formule de Taylor-Maclaurin)

Chap. III : classement des fluentes de certaines classes de fluxions

Chap. IV : règles de la méthode des fluentes

Chap. V : problèmes résolus par la méthode des fluxions ou des fluentes de manière algébrique.

Second Livre :

« Sur le calcul dans la méthode des fluxions »

Colin Maclaurin (1698-1746)

III. L'article « Calcul différentiel » de D'Alembert dans l'*Encyclopédie*

« M. Newton […] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premieres & dernieres raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différentié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, & que la différentiation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme.

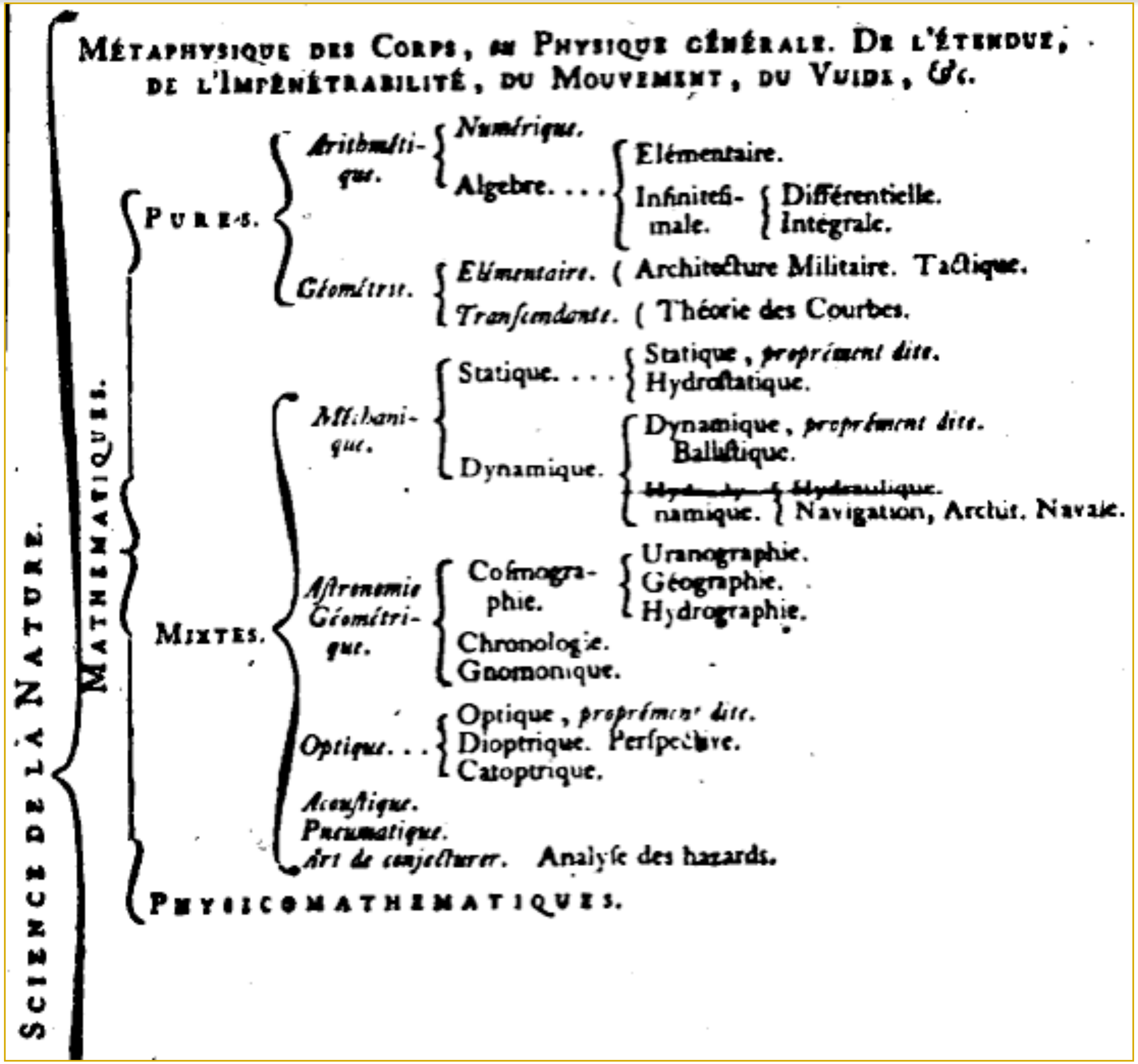
Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)

[…]

Quand une fois on l'aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abréger & simplifier les raisonne-mens ; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébrique-ment la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel »

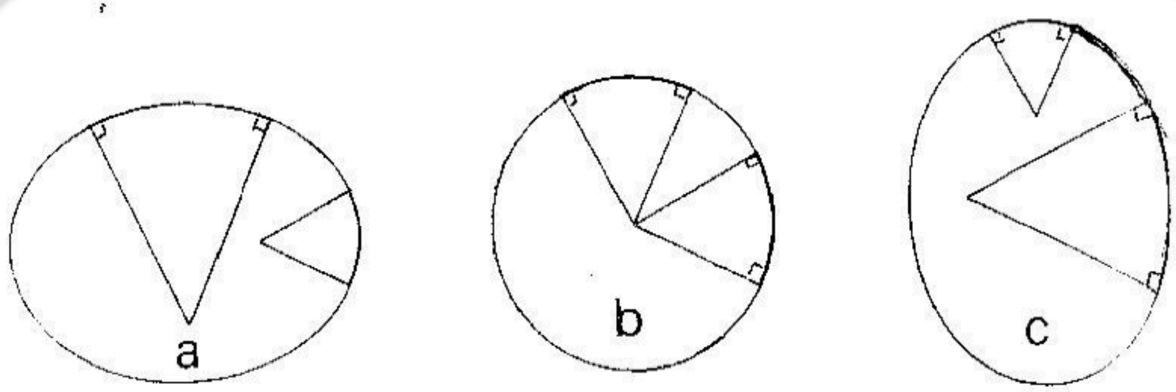
IV. Les sciences physico-mathématiques

Extrait de l'*Arbre des connoissances humaines* publié dans le I[er] tome de l'*Encyclopédie* (1751)



IV. Le problème de la figure de la Terre

Les trois hypothèses en discussion



Terre aplatie

Terre sphérique

Terre oblongue

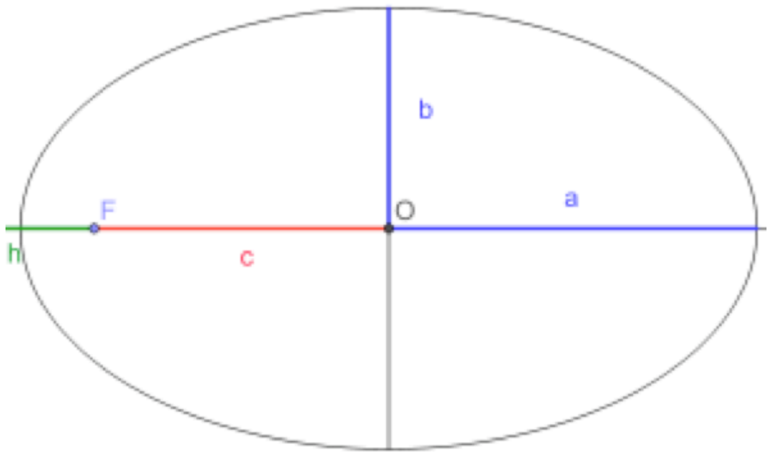
Les angles étant égaux sur ces figures :

- ✓ Hypothèse a : l'arc est plus grand près du pôle qu'à l'équateur
- ✓ Hypothèse b: il n'y a pas de différence
- ✓ Hypothèse c : l'arc est plus petit près du pôle qu'à l'équateur

Terre aplatie, oblongue ou sphérique?

Une longue controverse est lancée :

- Suivant les mesures de Cassini : la Terre est allongée suivant l'axe polaire.
- Les théoriciens (Huygens et Newton) prédisent une Terre aplatie.
    - pour Huygens : $\alpha = 1/576$
    - pour Newton : $\alpha = 1/230$
- L'Académie royale des sciences de Paris décide de trancher en envoyant deux expéditions :
    - l'une au pôle,
    - l'autre au Pérou.



Déformation

$$\alpha = \frac{a-b}{a}$$

$\alpha > 0$: terre aplatie
$\alpha < 0$: terre oblongue
$\alpha = 0$: terre sphérique

IV. Le problème de la figure de la Terre

L’expédition en Laponie (1736-1737)

- Les participants : Maupertuis, Clairaut, Celsius.
- Au retour de l’expédition, le 13 novembre 1737, Maupertuis fait un compte-rendu devant l'Académie royale des Sciences :

THEORIE
DE LA
FIGURE
DE LA TERRE,
Tirée des Principes de l'Hydroſtatique:
Par M. Clairaut, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.
A PARIS,
Chez David Fils, Libraire, ruë Saint-Jacques, à la Plume d'or.
MDCCXLIII.
Avec Approbation et Privilege du Roi.

« enfin notre degré avec l'aberration diffère de 950 toises de ce qu'il devrait être suivant les mesures que M^{r} Cassini a établies dans son livre *Grandeur et figure de la Terre*… d'où l'on voit que la Terre est considérablement aplatie vers les pôles ».

L’expédition au Pérou (1736-1737)

- Les participants : Pierre Bouguer, La Condamine.
- Retour… en 1744 ! Bouguer et La Condamine confirment l’aplatissement au pôle, résultat déjà admis par l’Académie…

La *Théorie sur la figure de la Terre* d’Alexis Clairaut (1743)

IV. Naissance d'une théorie unidimensionnelle des écoulements (1738-1744)

1738 Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica*

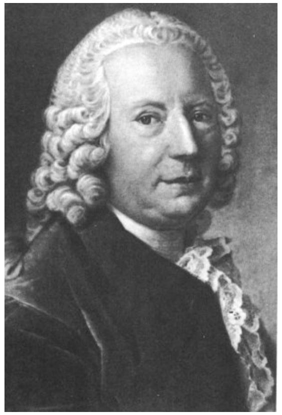
1742 Maclaurin, *Treatise of Fluxions*

1743 Jean Bernoulli, *Hydraulica*

1744 D'Alembert, *Traité des fluides*

Application du calcul différentiel et intégral par le biais de l'hypothèse du parallélisme des tranches

- Conservation des forces vives (~conservation de l'énergie cinétique)



- Formulation newtonienne des lois du mouvement

- Principe de D'Alembert

- La conservation des forces vives acquiert le statut de première intégrale du mouvement

IV. Naissance d'une théorie unidimensionnelle des écoulements (1738-1744)

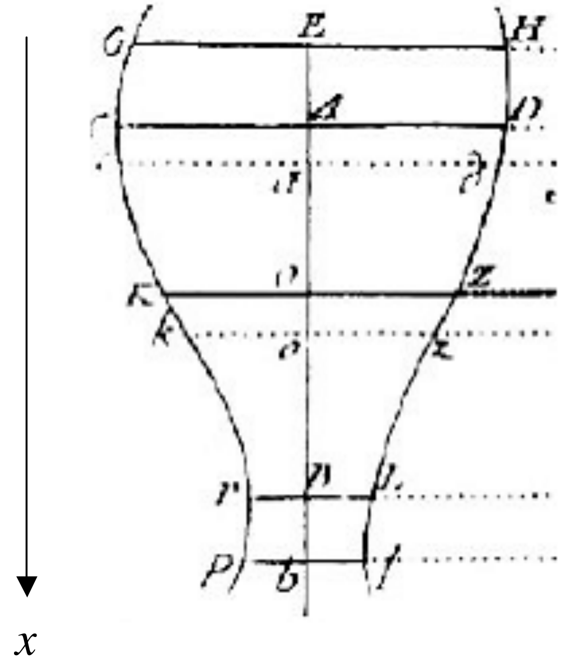
- « *L'Expérience de concert avec la Théorie nous fait connaître que, quand un fluide s'écoule d'un vase, sa surface supérieure demeure toujours sensiblement horizontale : d'où l'on peut conclure que la vitesse de tous les points d'une même tranche horizontale, estimée suivant le sens vertical, est la même dans tous ses points, & que cette vitesse, qui est à proprement parler la vitesse de la tranche, doit être en raison inverse de la largeur de cette même tranche* ».

(D'Alembert, *Traité des fluides*, préface, p. xiij)

- Mise en équation de l'écoulement selon une seule variable d'espace x, désignant la hauteur du fluide dans le vase.

- « *Si on ne veut pas convenir que les tranches conservent leur parallélisme, j'avoue qu'il seroit peut-être fort difficile de démontrer cette supposition en rigueur* (…). *Mais aussi il faut dans ce cas renoncer à toute Théorie sur le mouvement des fluides jusqu'à ce que nous en connaissions la nature. Car il n'y aurait plus alors d'autre moyen pour déterminer ce mouvement que d'examiner celui que chaque particule devrait avoir : or c'est à quoi nous ne croyons pas qu'on puisse atteindre sans connaître la nature des Fluides* ».

(D'Alembert, *Traité des fluides*, article 110, p. 95-96)



Écoulement d'un fluide dans un vase *GHLP*

IV. Naissance d’une théorie analytique des écoulements (1743-1755)

1743 Clairaut, *Théorie sur la figure de la Terre*

1744 Sujet du prix de l’Académie de Berlin pour l’année 1746

1747 D’Alembert, *Réflexions sur la cause des vents*

1748 Sujet du prix de l’Académie de Berlin pour l’année 1748

1749 D’Alembert, pièce latine concourant au prix de l’Académie de Berlin de 1750

1752 D’Alembert, *Essai d’une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*

1752 Euler, *Principia motu fluidorum*

1755 Euler, mémoires dans l’*Histoire de l’Académie de Berlin pour l’année 1755*

- Application du calcul aux différences partielles en hydrostatique

- Condition d’équilibre d’un fluide incompressible

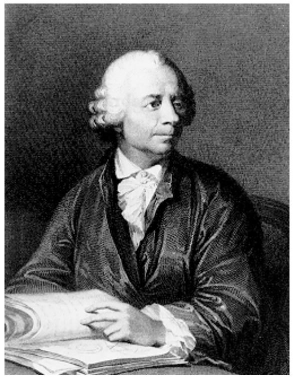
- Représentation des composantes de la vitesse comme des fonctions de plusieurs variables

- Application du calcul aux différences partielles en hydrodynamique

- EDP du mouvement 2D d’un fluide incompressible potentiel idéal

- Variable de pression

- EDP du mouvement 3D d’un fluide compressible idéal



IV. Les limites de l'approche analytique

- D'Alembert, *Essai sur la résistance des Fluides*, Introduction, p. xxxiv :

  « Mais après avoir sacrifié à la sûreté des principes la facilité du calcul, je devais naturellement m'attendre que l'application du calcul à ces mêmes principes serait fort pénibles, et c'est aussi ce qui m'est arrivé. Il me paraît même très vraisemblable, que du moins en certains cas la solution du Problème se refusera entièrement à l'Analyse »

- Euler, « Continuation des recherches sur le mouvement des fluides », *HAB 1755* (1757), art. LXVIII, p. 315 :

  « Nous voyons par là suffisamment, combien nous sommes encore éloignés de la connoissance complette du mouvement des fluides, & ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant toute ce que la Théorie des fluides renferme, est contenu dans les deux équations rapportées cy-dessus, de sorte que ce ne sont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la poursuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyse, qui n'est pas encore assez cultivée, pour ce dessein : & partant on voit clairement, quelles découvertes nous restent encore à faire dans cette Science, avant que nous puissions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides ».

IV. Les enjeux du développement de l'hydrodynamique entre 1760 et 1780

Les EDP obtenues par D'Alembert et Euler résistent aux techniques de calcul de l'époque

⇩

Crise de l'hydrodynamique ~ concordance entre théorie et expérience

[Ecoulement des fluides]

[Résistance des fluides]

Tentative de résolution des EDP gouvernant l'écoulement d'un fluide (Euler, D'Alembert et Lagrange)	Retour à l'approche unidimensionnelle des écoulements et remise en question de ses fondements (Borda contre D'Alembert, Bossut, Condorcet et Lagrange)	Mise en défaut expérimentale de la théorie newtonienne de la résistance des fluides (Borda, Bossut) Enoncé par D'Alembert de son célèbre paradoxe de la résistance des fluides

Innovation théoriques, en physique et en mathématiques (D'Alembert, Lagrange, Borda)

&

Retour vers une démarche alliant théorie et expérience (Borda, Bossut, Du Buat)

Quelques unes des sources utilisées pour la préparation de ce cours…

- M. Blay, *La naissance de la mécanique analytique – La science du mouvement au tournant des XVII^e et XVIII^e siècles*, PUF, Paris, 1992.
- A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales, Editions du Seuil*, Paris, 2^e éd., 1986.
- G.W. Leibniz, *Naissance du calcul différentiel*, M. Parmentier (éd. et trad.), Vrin, Paris, 1995.
- J. Peiffer, « Fluxions et différences », *Cahiers de Science & Vie*, n° 38 (avril 1997), p. 46-54